ریاضی ۲ مخصوص تجربی

حل تمرین های درس دوم فصل هفتم

۱- معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ را با فرض $\Delta>0$ در نظر بگیرید، اگر α و β ریشه‌های این معادله باشند آن‌گاه مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\boldsymbol{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}$$

$$\boldsymbol{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

۲- معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد را می‌توان به صورت زیر نوشت:

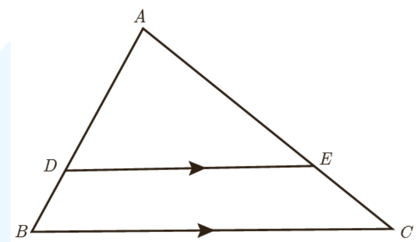
$$x^2-Sx+P=0$$

۳- برای حل یک معادله رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با توان رساندن طرفین تساوی و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد.

پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادله اولیه صدق می‌کنند.

۴- اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که به‌وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

$$DE \| BC \rightarrow ADE \sim ABC$$



۵- اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با هم متشابه باشند و نسبت تشابه برابر با k باشد، آنگاه نسبت محیط‌ها و نسبت ارتفاع‌ها برابر با k و نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر k^2 می باشد.

۶- اگر مولفه‌های همه زوج‌های مرتب تابع یک به یک f را جابه‌جا کنیم، آنگاه تابع جدیدی به‌دست می‌آید که آن را تابع وارون f گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

۷- برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، کافی است در معادله $y = f(x)$ ، ابتدا رابطه x را بر حسب y محاسبه کنیم. سپس با جابه‌جا کردن متغیرهای x و y ، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ را به‌دست آوریم.

۸- نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\pi \pm \alpha$:

$$sin(\pi - \alpha) = sin\alpha$$

$$cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$$

$$tan(\pi - \alpha) = -tan\alpha$$

$$cot(\pi - \alpha) = -cot\alpha$$

$$sin(\pi + \alpha) = -sin\alpha$$

$$cos(\pi + \alpha) = -cos\alpha$$

$$tan(\pi + \alpha) = tan\alpha$$

$$cot(\pi + \alpha) = cot\alpha$$

۹- نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = tan\alpha$$

10- نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان:

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-tan\alpha$$

11- نسبت‌های مثلثاتی زوایای $2k\pi-\alpha$:

$$\sin(۲k\pi-\alpha)=-sin\alpha$$

$$\cos(۲k\pi-\alpha)=cos\alpha$$

$$\tan(۲k\pi-\alpha)=-tan\alpha$$

$$\cot(۲k\pi-\alpha)=-cot\alpha$$

12- نسبت‌های مثلثاتی زوایای $2k\pi+\alpha$:

$$\sin(۲k\pi+\alpha)=sin\alpha$$

$$\cos(۲k\pi+\alpha)=cos\alpha$$

$$\tan(۲k\pi+\alpha)=tan\alpha$$

$$\cot(۲k\pi+\alpha)=cot\alpha$$

۱۳- برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c و $(c\neq ۱)$ داریم:

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right)=\log_c a-\log_c b$$

۱۴- برای حل معادلات لگاریتمی ابتدا به کمک روشهای مختلف ریاضی و ویژگی‌های لگاریتم عبارت معادله را ساده کرده سپس برای حل معادله به یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) به‌طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت $(a\neq ۱)$ باشد، آنگاه با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتمی، می‌توان رابطه دو شرطی زیر را نتیجه گرفت:

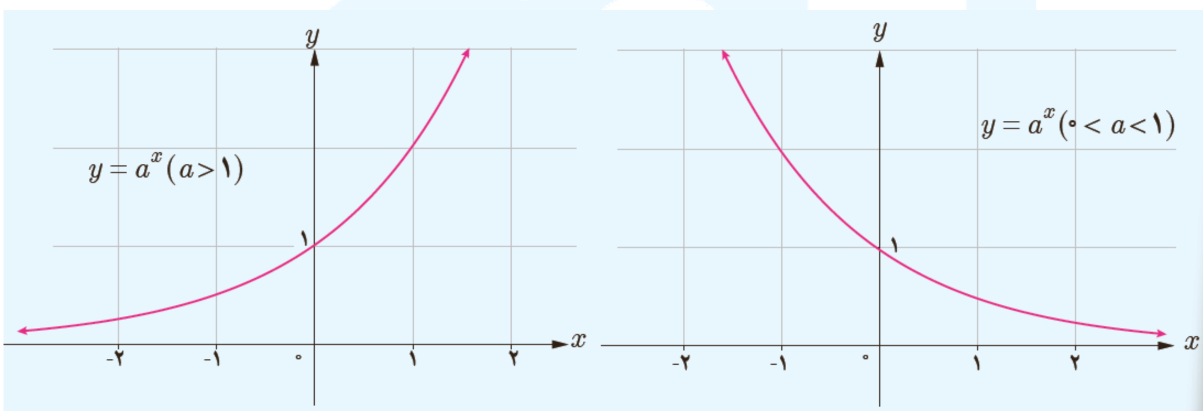
$$\log_a P(x) = \log_a Q(x) \leftrightarrow P(x) = Q(x)$$

ب) اگر با توجه به تعریف لگاریتم می‌توانیم از رابطه زیر هم استفاده کنیم:

$$\log_a P(x) = b \leftrightarrow P(x) = a^b$$

ریشه‌های به‌دست آمده از حل معادلات را باید با دامنه عبارت‌های معادله اولیه بررسی کنیم که جلوی لگاریتم منفی یا صفر نشود.

۱۵- نمودار تابع نمایی $y = a^x$ در حالت کلی، مشابه یکی از دو حالت زیر می‌باشد:



16- نمودار تابع نمایی $y = a^x$ را در نظر بگیرید. برای رسم نمودار تابع $y = ka^{x+b} + c$ کافی است مراحل زیر را انجام دهید.

الف) ابتدا نمودار $y = a^x$ را به اندازه b واحد به سمت چپ یا راست منتقل کنید.

($b < ۰$: به سمت راست، $b > ۰$: به سمت چپ)

ب) تمام yهای نقاط نمودار مرحله ۱ را در عدد k ضرب کنید.

پ) نمودار مرحله ۲ را به اندازه c واحد به سمت بالا یا پایین منتقل کنید.

($c > 0$: به سمت بالا، $c < 0$ به سمت پایین)

۱۷- اگر در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{0\,(\text{حدی})}{0\,(\text{حدی})}$$

برای رفع ابهام کافی است صورت و مخرج کسر را تجزیه کرده سپس با ساده کردن عامل ابهام (صفر کننده) از صورت و مخرج کسر، حاصل حد را به‌دست می‌آوریم.

عامل ابهام همان عبارت $x-a$ می‌باشد که در صورت و مخرج کسر وجود دارد.

۱۸- تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه مقدار تابع و حد تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

۱۹- قاعده ضرب احتمال‌ها: دو پیشامد A و B از یک فضای نمونه‌ای S را در نظر بگیرید. برای محاسبه احتمال وقوع پیشامد $A\cap B$ از قاعده احتمال شرطی کمک می‌گیریم. بطوریکه داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\rightarrow P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$$

به عبارت دیگر اگر بخواهیم هر دو پیشامد A و B با هم رخ دهند، اول یکی رخ می‌دهد و سپس دیگری با فرض رخ دادن اولی اتفاق می‌افتد.

۲۰- واریانس: میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آنها را واریانس می‌نامند و از نماد $\sigma^۲$ برای نمایش آن استفاده می‌شود. بنابراین می‌نویسیم:

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{X})^۲ + (x_۲ - \bar{X})^۲ + \cdots + (x_n - \bar{X})^۲}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^۲}{n}$$