

حسابان ۱

تشکیل معادله درجه ۲
معادله‌ای که ریشه‌های آن α و β باشد

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad \alpha+\beta=S, \alpha\beta=P$$

$$x^2-Sx+P=0$$

مثال ۱: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن موارد زیر باشد.

$$x^2-Sx+P=0$$

الف) $-3, 5 \Rightarrow S=2, P=-15 \Rightarrow x^2-2x-15=0$

ب) $2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3} \Rightarrow S=4 \quad P=4-3=1 \Rightarrow x^2-4x+1=0$

مثال ۲: محیط یک مستطیل ۱۴ سانتی‌متر و مساحت آن ۱۰ سانتی‌مترمربع است. ابعاد مستطیل را به دست آورید. (مشابه کتاب درسی)

$$\left. \begin{array}{l} 2(a+b)=14 \Rightarrow a+b=7=S \\ ab=10 \Rightarrow P=10 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2-7x+10=0 \quad \text{طول } x=5=a \quad \text{عرض } x=2=b$$

مثال ۳: با ۱۸ متر نرده، زمین مستطیل شکل به مساحت ۸ مترمربع محصور می‌کنیم. اختلاف طول و عرض زمین را بیابید.

$$\left. \begin{array}{l} 2(a+b)=18 \Rightarrow a+b=9=S \\ a.b=8 \Rightarrow P=8 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2-9x+8=0 \quad |a-b| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|1|} = \frac{\sqrt{81-32}}{1} = \frac{\sqrt{49}}{1} = 7$$

مثال ۴: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن وارون ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد.

روش اول:

$$\text{ریشه معادله جدید } X = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{X} \in ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a\left(\frac{1}{X}\right)^2 + b\left(\frac{1}{X}\right) + c = 0$$

$$\frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + c = 0$$

$$a + bX + cX^2 = 0 \text{ یا } \boxed{cX^2 + bX + a = 0}$$

روش دیگر برای مثال ۴

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a}, P = \frac{c}{a}$$

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} \\ P' = \alpha'\beta' = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0 \xrightarrow{\times c} \boxed{cx^2 + bx + a = 0} \text{ معادله جدید}$$

مثال ۵: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن قرینه ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد.

$$\text{ریشه معادله جدید } X = x \Rightarrow x = -X \in \text{ معادله } \Rightarrow a(-x)^2 + b(-x) + c = 0$$

$$\boxed{ax^2 - bx + c = 0} \text{ روش اول:}$$