

نسبت‌های مثلثاتی دو آلفا (۲ از ۲)

اگر بخواهیم برای دو زاویه α و β رابطه را بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

اگر صورت و مخرج را بر $\cos \alpha \cos \beta$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

و در مورد زاویه 2α داریم:

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

برای درک بهتر اتحادهای مثلثاتی 2α به چند مثال توجه کنید:

مثال ۱: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24} =$$

با توجه به اینکه زاویه های $\frac{\pi}{24}$ و $\frac{11\pi}{24}$ و همچنین $\frac{5\pi}{24}$ و $\frac{7\pi}{24}$ متمم یکدیگر هستند، خواهیم داشت:

$$\sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24} = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24}$$

$$= \sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} = \frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{24}\right) \frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{24}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{16}$$

مثال ۲: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\tan 75^\circ$$

می دانیم که: $\tan 2\alpha = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ و اگر $\alpha = 75^\circ$ باشد خواهیم داشت:

$$\tan 150^\circ = \frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \tan 75^\circ = \sqrt{3} + 2$$