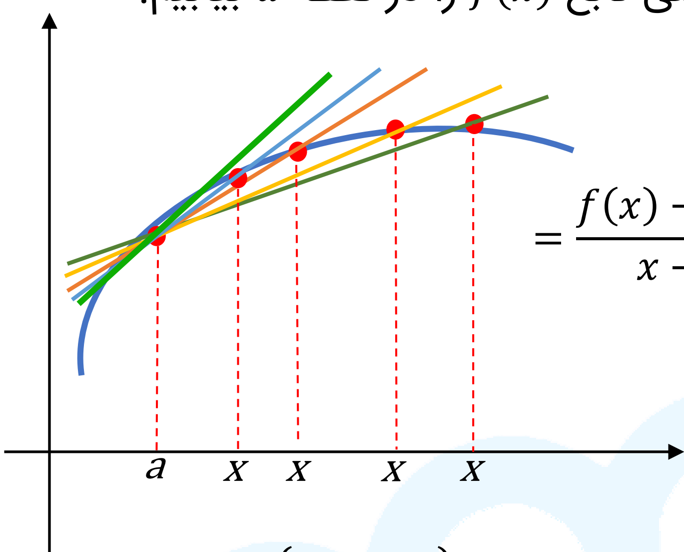
ریاضی ۳

تعریف مشتق

می خواهیم شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ را در نقطه a بیابیم.



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ را در نقطه $\mathrm{A}\big(a\,,\,f(a)\big)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

در صورتی که این حد موجود و متناهی باشد، آن را مشتق تابع f در نقطه a می نامیم و آن را با $f'(a)$ نمایش می دهیم. یعنی:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعبیر هندسی مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $\mathrm{A}\big(a\,,\,f(a)\big)$ شیب خط مماس برتابع در آن نقطه است.

برای درک بهتر تعریف مشتق به چند مثال توجه کنید:

مثال ۱ : مشتق تابع $f(x) = x^۳$ را در نقطه $x = ۲$ بیابید.

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{x^{۳} - ۲^{۳}}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x - ۲)(x^{۲} + ۲x + ۴)}{x - ۲}$$
$$= ۱۲$$

مثال ۲. : مشتق تابع $f(x) = [x]$ را در نقطه $x = ۳$ بیابید.

$$f'(۳) = \lim_{x\to ۳} \frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{[x] - ۳}{x - ۳}$$

$$= \begin{cases} \lim_{x\to ۳^+} \frac{[x] - ۳}{x - ۳} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۳ - ۳}{x - ۳} = ۰ \\ \lim_{x\to ۳^-} \frac{[x] - ۳}{x - ۳} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{۲ - ۳}{x - ۳} = +\infty \end{cases} \rightarrow \text{حد ندارد}$$