مشتق چپ و راست

مشتق راست تابع $f(x)$ در $x=a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'_+(a)=f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مشتق چپ تابع $f(x)$ در $x=a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'_-(a)=f'(a^-)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

قضیه :

شرط لازم و کافی برای مشتق‌پذیری تابع $f(x)$ در $x=a$ در نقطه آن است که مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و برابر باشند.

برای درک بهتر مطلب فوق به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱ : با محاسبه مشتق چپ و راست تابع زیر، مشتق پذیری آن را در نقطه مشخص شده بررسی کنید. $f(x)=|x-۳| \quad \to \quad x=۳$

تعریف مشتق چپ و راست را برای تابع در نقطه $x=۳$ می‌نویسیم:

$$f'_+(۳)=\lim_{x\to ۳^+}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{|x-۳|-۰}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x-۳}{x-۳}=۱$$

$$f'_-(۳)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{|x-۳|-۰}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$

چون مشتق چپ و راست نابرابر شد، بنابراین تابع مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۲ : با محاسبه مشتق چپ و راست تابع زیر، مشتق پذیری آن را در نقطه مشخص شده بررسی کنید. $f(x) = \sqrt[۳]{x-۱} \quad \rightarrow \quad x = ۱$

$$f'_{+}(۱) = \lim_{x\to ۱^{+}} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^{+}} \frac{\sqrt[۳]{x-۱}-۰}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^{+}} \frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{\sqrt[۳]{(x-۱)^{۳}}}$$

$$= \lim_{x\to ۱^{+}} \frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}} = +\infty$$

به دلیل اینکه مشتق راست موجود نیست پس تابع مشتق‌پذیر نیست.