

ریاضی و آمار ۳

تمارین کتاب شمارش (۲ از ۲)

مسایل شمارش اعداد :

1- صفر نمی تواند رقم اول قرار بگیرد.

2- اول شرایط خاص مساله را در شمارش اعمال می کنیم و سپس مابقی جایگاهها را پر می نماییم.

3- در محاسبه تعداد اعداد «زوج» یا «مضرب 5» به کمک ارقامی که «صفر» نیز در آنها وجود دارد، بایستی مسئله را به دو مرحله تقسیم کرده و تعداد اعداد هر مرحله را جداگانه محاسبه کرده و در پایان، جوابهای دو مرحله را با هم جمع کنیم؛

مرحله اول : رقم «صفر» در یکان قرار داشته باشد.

مرحله دوم : رقم «صفر» در یکان قرار نداشته باشد.

← آشنایی با نماد فاکتوریل :

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2 \quad 1! = 1 \quad 0! = 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

◀ ساده سازی فاکتوریل :

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)!$$

◀ جایگشت :

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن شیء می‌گوییم و برابر است با $n!$.

شیء متمایز n تعداد جایگشت‌های $n!$

نکته 1: در محاسبه جایگشت دسته‌بندی، اشیایی که می‌خواهیم در کنار هم باشند را یک دسته در نظر می‌گیریم، آنگاه جایگشت اشیاء داخل دسته را در جایگشت مابقی اشیاء به‌مراه دسته ضرب می‌کنیم.

نکته 2: در محاسبه جایگشت یکی در میان اگر تعداد اشیاء غیرهمنوع برابر بود، حاصلضرب جایگشت‌ها ضربدر 2 می‌شود. اما اگر اشیاء غیرهمنوع، یک واحد اختلاف داشتند، فقط جایگشت‌ها در هم ضرب می‌شوند.

◀ تبدیل (جایگشت) r شیء از میان n شیء :

تعداد حالت‌های انتخاب و چینش r شیء از میان n شیء متمایز (ترتیب اشیاء مهم است و با جابه‌جایی هریک، حالت جدیدی به وجود می‌آید) که برابر است با :

$$P(n,r) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

◀ ترکیب r شیء از میان n شیء :

تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از میان n شیء متمایز (فقط انتخاب مهم است و ترتیب اشیاء مهم نیست و جابه‌جایی اشیاء حالت جدیدی تولید نمی‌کند) که برابر است با :

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

نکته : تبدیل = ترکیب * جایگشت

نکته : روابط زیر را برای سرعت و سهولت در محاسبات به خاطر بسپارید:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

ریاضی و آمار ۳

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2 \times 1}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

◀ کاربردهای ترکیب در حل مسایل:

1- شمارش تعداد زیرمجموعه‌ها

2- شمارش تعداد پاره خط، بردار، وتر و مثلث در مسایل هندسی

3- مسایل خروج مهره از کیسه و مشابه آن

4- مسایل تشکیل کمیته و گروه و تیم

5- دقت در کلید واژه‌هایی چون حداقل، حداکثر، شامل و فاقد